数理解析研究所講究録
第752巻 1991年 140-148

Drinfeld module の退化について

東大理　藤原　一宏

§0 Introduction

その有名な論文 [D1] において Drinfeld が導入(精確には再発見. Carlitz が既に定義している)した "elliptic module" の概念は. 函数体上における楕円曲線のよい類似であり その moduli space の研究は 函数体の Langlands 予想との関連から大きな興味をひく大問題である. しかしながら現在満足のいく研究がなされているのは その次元が1ないし2になる場合に限られており. 次元3以上ではほとんど不明である. 次元がますことによる困難の一因としてあげられるのは. 考えている空間が affine なため その非特異コンパクト化が必要とされるのであるが. 標数 p であるため その存在すら保証されないことがある

この小論では. コンパクト化の構成に必要とされる elliptic module の退化理論を論じることにする. 実際, elliptic module の moduli space は 代数体上での志村多様体の類似であり. Chai, Faltings, 筆者 による志村多様体の算術的なトロイダル

コンパクト化の手法を適用する際に 退化の理論は必要不可欠である.

§1では必要な定義を述べ, §2で結果を述べることとする.
ただし本稿では "elliptic module" ではなく "Drinfeld module" という用語で統一することとし, 証明は省略する.

§1. Drinfeld module とその性質

$\mathbb{F}_q$ を有限体, C を $\mathbb{F}_q$ 上の射影非特異曲線とし, ∞ を C の $\mathbb{F}_q$ 有理点とする. (以後固定して考える) A を affine 曲線 $C \setminus \{\infty\}$ の座標環とし, K をその関数体とする. 類似でいうと

$$K \Leftrightarrow \mathbb{Q} \quad , \quad \infty \Leftrightarrow \text{無限素点}$$
$$A \Leftrightarrow \mathbb{Z}$$

となっている.

定義. S が A-scheme, $\mathcal{L}/S$ が 1次元 additive group scheme (Zariski 位相に関し局所的に $\mathbb{G}_a = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_S[X]$ と同型) のとき $E = (\mathcal{L}, \phi)$ が A-module scheme であるとは

$\phi : A \to \mathrm{End}_S \mathcal{L}$ が環準同型であり, $\mathcal{L}$ の Lie 代数 $\mathrm{Lie}\, \mathcal{L}/S$ に引きおこされる A の作用は A による multiplication つまり $a \in A$ は $\mathrm{Lie}\, \mathcal{L}/S$ 上 a 倍で作用する

こととする.

特に $\mathcal{L}$ が $\mathbb{G}_a=\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S[X]$ と座標を指定されているときには $\mathrm{End}_S\mathcal{L}=\{\sum_{i\geq 0} a_i X^{p^i} \quad a_i\in\Gamma(S,\mathcal{O}_S)\}$
という表示ができ、ϕ による a の像 ϕ_a が

$$\phi_a(X)=\sum_{i\geq 0} a_i X^{p^i} \qquad a_0=a$$

をみたすことが必要かつ十分である。

定義　S 上の A-module scheme $E=(\mathcal{L},\phi)$ が rank $d\ (\geq 1)$ の Drinfeld module であるとは

局所座標で表示したとき $a\in A$ の作用が

$$\phi_a(X)=\sum_{i\geq 0}^{n} a_i X^{p^i} \qquad a_n \text{ は可逆}$$

と書け、$|a|_\infty=p^{nd}$ を満たす

ことをいう。ただし $|\ |_\infty$ は ∞ での付値

特に $A=\mathbb{F}_q[t]$ のときには t の作用だけを決めれば十分なので Drinfeld module は elliptic curve と比べてもより初等的な対象である。（特に $d=2$ のときがこの2つの概念がよい類似となる）。

ここで Drinfeld module の moduli space についても少し述べておく。
$I\subset A$ を non-zero ideal とするとき、level I-structure という概念が定まる。つまり E/S を Drinfeld module としてその I 分点 $E[I]$ を　$E[I]=\mathrm{Ker}(\phi_a:\mathcal{L}\to\mathcal{L})$ （$I=(a)$ のとき），
$E[I]=\bigcup_{a\in I\setminus\{0\}} E[(a)]$ （一般のとき） ときめると、$E[I]$ は有限

平坦なスキーム/S となる　そこで Sの標数が I と素なとき は
$\alpha: E[I] \xrightarrow{\sim} (I^{-1}A/A)^d$ という同型を level I-structure という。
(標数に条件をつけなくても level structure は定義可能でよい性質をもつことが知られている)　そこで A 上の stack $\mathcal{M}^d_I$ を

A-scheme S に対し

$\mathcal{M}^d_I(S) = \{$ (E, α)　E は S 上の Drinfeld module
α は E の level I-str.
射は上記構造を保つ同型射 $\}$

と定義すると $\mathcal{M}^d_I$ は 代数的な stack (I が2つの異なる素点で割れればスキーム) となり A 上平坦, 相対次元 $d-1$ の正則な stack となる (Intro. で述べたように coarse space は affine)
$\mathcal{M}^d_I$ 又はその A 上の生成ファイバーを Drinfeld modular scheme という. ここでは $\mathcal{M}^d_I \times_A K_\infty$　K_∞: K の∞での完備化 の記述が標数 p の対称空間によって可能であることを示す.
つまり C_∞ を K_∞ の代数閉包の完備化とすると

定理 (Drinfeld)

C_∞ 上の rank d の Drinfeld module ⇔ C_∞ 内の discrete A-lattice of rank d.

$E = C_\infty/\Lambda$　Λ: lattice

という定理から $\mathcal{M}^d_I \times_A C_\infty$ の連結成分が $\Gamma\backslash\Omega^d$
Ω^d: $GL(d, K_\infty)$ に対する対称空間 i.e.

$\Omega^d(C_\infty) = \mathbb{P}^{d-1}_{C_\infty} \setminus \{\text{all } K_\infty\text{-rational hyperplanes}\}$

Γ : $GL(d, K_\infty)$ 内の arithmetic subgroup

と表わせることがわかる

このように Drinfeld modular scheme は志村多様体の類似であるが、$d>2$ のときにはその代数体上の対応物が存在しない。
($GL(d)$ に対する対称空間は複素構造をもたない)。

逆に、函数体のときには $d>2$ のときの(分岐) Langlands 予想に Drinfeld modular scheme (の極小コンパクト化の交叉コホモロジーの計算)によりせまる可能性は十分にあることとなる

この§の最後に Drinfeld module の退化として最も重要な semi-Drinfeld module の概念を導入しておく。

定義. S が normal scheme, E/S を A-module scheme とする。このとき E/S が semi-Drinfeld module だとは

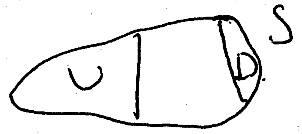
E/S の $\forall s \in S$ での fiber E_s/s が s 上の Drinfeld module である

ことをいう。

各点での fiber の rank は異なりうることに注意しよう。

§2. Drinfeld module の semi-stable 退化.

この§では $S = \mathrm{Spec}\, V$. $D = V(\mathfrak{m})$ を閉集合 $U \subset S$ を open set として S は normal, $U \cap D = \emptyset$, V は $\mathfrak{m}$進完備を仮定する.



与えられた semi-Drinfeld module E/S が

(E_U は rank d の Drinfeld module ($E_U = U$ への制
$E \times_S D$ は rank d' の Drinfeld module

の2条件をみたすとする. (必ず $d' \leq d$). 立場を変えれば E_U が D方向に退化していく状況となるわけである

Drinfeld によれば この状況で

Proposition − Definition

rank d_1 の Drinfeld module $\tilde{E}/S$, 形式 A-準同型
$\hat{u} : \hat{\tilde{E}} \to \hat{E}$ (^ : $\mathfrak{m}$進完備化) があって
$\hat{u} \bmod \mathfrak{m}$ は同型となる ($\tilde{E}, \hat{u}$) は unique に定まる

がいえる. そこで $\tilde{E}$ を E の fixed part ということにする
(semiabel 多様体の時の Raynaud group の類似)

座標系でかけば $\hat{u}(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^{p^i}$, $a_0 = 1$, $a_i \in \mathfrak{m}$ ($\forall i > 0$)

$$\hat{u}(\tilde{\phi}_a(X)) = \phi_a(\hat{u}(X)) \quad \forall a \in A$$

となることになる. Drinfeld 自身が考えたのは $\dim S = 1$ のとき, つまり V が離散付値環の時で. このときはさらに次のような

ことがいえる：

$\widehat{e}$は単に m進の形式巾級数でなく、rigid-analytic な意味で収束し整函数 $e^{an}: \widehat{E}^{an} \to E^{an}/K$, $U=\mathrm{Spec}\,K$ を定義する。e^{an}は全射で、従って $\Lambda = \mathrm{Ker}(\widehat{E}^{an} \xrightarrow{e^{an}} E^{an})$ とおくと Λ は rank $d-d'$ の discrete A-module $\subset \widehat{E}(K^{sep})$（$K^{sep}$：分離閉包）

$$E^{an} = \widehat{E}^{an}/\Lambda \quad \text{(rigid-analytic に)}$$

と商表示される。そして

$$\left\{ \text{S上の semi-Drinfeld modules } E \right\} \qquad E$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \updownarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{S上の Drinfeld module } \widehat{E} \\ \text{discrete A-lattice } \Lambda \subset \widehat{E}(K^{sep}),\ Gal(K^{sep}/K)\text{-stable} \end{array} \right\} \qquad (\widehat{E}, \Lambda)$$

は圏の同値となる（Raynaud-Tate の semiabelian scheme の一意化理論の類似）。

この $\dim S = 1$ の場合の理論は非常に満足できるものであり、いかに高次元の場合に拡張するかが問題となる。

まず注意すべきことは上述の証明法は通用しなくなることである。$\dim S > 1$ の場合にも rigid geometry と呼ばれるものは存在するが (Raynaud) "$\widehat{E}^{an}$" の構成等に無理がでる。
従って、他の方法による直接証明以外に道はない（一意化の問題: semi-abelian な場合にも全く同じ困難が生じた）。

このことをふまえた上で

定理. § 初めの E に対する仮定の下で

A-lattice $\Lambda \subset \hat{E}(K^{nr})$, rank $\Lambda = d-d'$ があり

(ただし K^{nr} は V の最大不分岐拡大の商体)

a) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1}$ は V 上整, $\lambda^{-1} \equiv 0 \pmod{m}$

$\forall n > 0$ に対し有限個の λ を除き $\lambda^{-1} \equiv 0 \pmod{m^n}$

また λ 自身が U 上整

b) $(\hat{E}, \Lambda)$ の構成は admissible base change と可換.

ただし $S' \to S$ が admissible とは base change 後も同じ条件が満たされることをいう

c) $\dim S = 1$ のとき $(\hat{E}, \Lambda)$ の構成は Drinfeld によるものと一致.

上記定理の証明は非常に技術的だが. しかし naive なものである. また, $(\hat{E}, \Lambda)$ と E との関係については

定理. 前定理の (a) を満たす $(\hat{E}, \Lambda)$ に対し semi-Drinfeld module E が存在し, $(\hat{E}, \Lambda)$ は E に伴う pair となる

そして $E \to (\hat{E}, \Lambda)$ は圏の同値を与える.

標語的には "$E = \hat{E}/\Lambda$" と思ってしまってもよいことになる. これらの定理によって完備な環上の Drinfeld module の semi-stable reduction は容易に記述される. Wild reduction の場合も同様の理論を考えることは望ましいだろうが. 応用上は

必要ではない。また、Andersonのt-motiveなどに拡張することも考えられる。これは興味深いように思う［A］。

上記の圏同値をcompact化に応用するときには、関手の構成 $E \to (\hat{E}, \Lambda)$ のより詳しい性質が必要となる（例えば摂動に対する安定性、Dに至る中間段階の退化の記述等）。これらについては現在準備中である。

References

[D1] V. G. Drinfeld, Elliptic modules, Mat. Sb. 94 no. 4, 594–627 (1974)

[D2] ——, Elliptic modules II, Mat. Sb. 102, no. 2, 182–194 (1977)

[A] G. W. Anderson, t-motives, Duke Math J. 53, no. 2, 457–502 (1986)

訂正　Drinfeld加群とその退化について

藤原一宏

mainな statementとして述べられている semi-Drinfeld加群の一意化であるが。その後 そのままの形では成り立たないことがわかったので、以下のようにします。

Sは affine regular scheme。$D_1, D_2, \dots, D_j$はSの既約因子で reduced normal crossing になっているものとし。$D = D_1 \cap \dots \cap D_j$ SはDに関し完備。$U = S \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_j)$ とする

E/Sを semi-Drinfeld加群で

☆1　D_1上 rank d_1 のDrinfeld加群

☆2　$D_2 \setminus D_1 \cap D_2$ 上 rank d_2 $(> d_1)$ のDrinfeld加群

☆3　$D_3 \setminus (D_1 \cup D_2) \cap D_3$ 上 rank d_3 $(> d_2 > d_1)$ の 〃

⋮

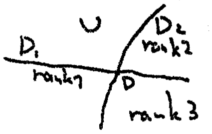
☆j : $D_j \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_{j-1}) \cap D_j$ 上 rank d_j $(> d_{j-1} > \dots > d_1)$ のDrinfeld加群

かつ U上 rank $d > d_j (> d_{j-1} \dots > d_1)$ のDrinfeld加群になっているものとする

example:

$j=2$

$d_1=1$　$d_2=2$　$d=3$



さらに技術的な仮定として

$D_i \setminus (D_1 \cup \dots D_{i-1}) \cap D_i$ の閉点で

Spec A （記号は本文と同じ）の閉点にいくものがあるとする。

（左の例のときにはこの仮定はいらない）

このとき

"Theorem" :　$S = \mathrm{Spec}\, V$.　K=商体，K^{sep}: separable closure

$\tilde{V}$ = VのK^{sep}内の normalization.

f_i : D_iの defining equation.

D_1 : D_1に沿ったEの fixed part E_1.

の中に $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$-stable な sublattice $\Lambda_1 \subset E_1(\tilde{V}[\frac{1}{f_1}])$ があり

$\lambda_1 \in \Lambda_1 \setminus \{0\}$ ⇒ $\frac{1}{\lambda_1}$はS上 regular で。D_1上消える

D_2 : $E_2 =$ "E_1/Λ_1" (適切な意味での quotient. (f_1-adic topology で考える))
とすると.
$\Lambda_2 \subset E_2(\mathcal{O}[\frac{1}{f_1 f_2}])$ があり (Gal-stable)
$\lambda_2 \in \Lambda_2 \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2}$ は S上 regular で. $D_1 \cup D_2$ 上消える.

D_3 : , ...

D_j : $E_j =$ "E_{j-1}/Λ_{j-1}" とすると $\Lambda_j \subset E_j(\mathcal{O}[\frac{1}{f_1 \cdots f_j}])$ があり (Gal-stable)
$\lambda_j \in \Lambda_j \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_j}$ は S上 regular で $D_1 \cup \cdots \cup D_j$ 上消える

そして最後に $E =$ "E_j/Λ_j" ($f_1 \times \cdots \times f_j$-adic topology による quotient)
となる　逆に (上記条件をみたす) ($E_1 \supset \Lambda_1$, $E_1/\Lambda_1 \supset \Lambda_2$, ..., $E_j \supset \Lambda_j$)
が与えられれば. 最初のような E を作れる.
(まだ多少細部の check が必要だが. example として書いた case では O.K.).

このように. semi-Drinfeld 加群を controll するには複雑な data が必要となる.
そして. 少なくとも $GL(3)$ のときに関しては. 上述の classification から
moduli space の compact 化が構成される.